Problemas Capítulo 4.
Leis de Conservação

Problemas Teóricos

1. Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -\,F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}$$

em que x é a posição do átomo e b a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal. Se o átomo partir da posição x_0 com velocidade v_{0x}, qual a dependência da velocidade em função da posição? É possível integrar analiticamente e desse modo calcular a lei do movimento e a lei da velocidade?

2 A relação entre a força conservativa e a energia potencial é

$$\begin{cases} F_x = -\frac{dE_p}{dx} \\ F_y = -\frac{dE_p}{dy} \\ F_z = -\frac{dE_p}{dz} \end{cases}$$

Calcule a força associada à energia potencial:

a) elástica $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$

b) gravítica superfície da Terra $E_p = m\, g\, y$

c) elástica do oscilador duplo $E_p = \frac{1}{2} k\big(\, x^2 - x_{eq}^2\big)^2$

d) gravítica $E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|} = -G\frac{m\,M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

e) da carga elétrica q originada pela carga Q, $E_p = -K\frac{q\,Q}{|\vec{r}|}$

3. O método numérico de integração numérica de um integral definido

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

de menor precisão é a aproximação retangular (ver apêndice).

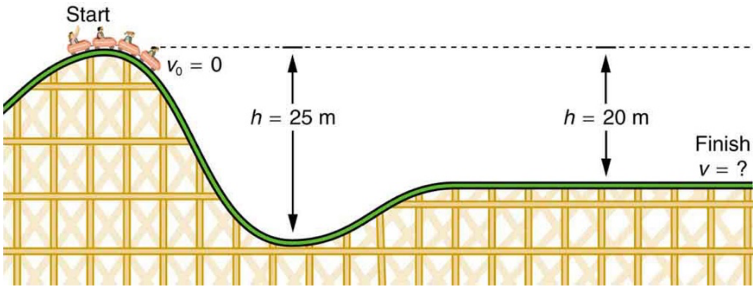
a) Determine como varia o erro de truncatura local com o passo δx.

b) Determine como varia o erro de truncatura global com o passo δx.

4. Se na montanha russa esquematizada na figura abaixo, a carruagem com os passageiros tiver a massa de 1000 kg, qual a velocidade

a) no ponto mais baixo?

b) na zona plana?



5. Qual a potência desenvolvida por um ciclista de massa 75 kg para manter a velocidade uniforme, na horizontal,

a) a 30 km/h?

b) a 40 km/h?

c) a 296.010 km/h?

O coeficiente de resistência μ de um piso liso de alcatrão é de 0.004, o coeficiente de resistência do ar é $C_{res} = 0.9$, de área frontal 0.30 m^2 e densidade do ar $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3.

6. Um ciclista no pelotão varre uma área eficaz 30% inferior à do ciclista à frente do pelotão.

a) Calcule a potência a desenvolver pelos dois ciclistas quando rolarem a uma velocidade de 40 km/h.

b) Calcule a potência a desenvolver pelos dois ciclistas quando rolarem a uma velocidade de 50 km/h?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

7. Muitos ciclistas amadores conduzem com o tronco levantado. Esta posição aumenta a área de varrimento para o dobro.

a) Calcule a potência a desenvolver pelo ciclista se a velocidade for 30 km/h.

b) E se a velocidade for de 40 km/h, qual a potência desenvolvida pelo ciclista?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

8. Uma pessoa e seu patim têm a massa de 70 kg. Qual a velocidade que deverão atingir para que o seu momento seja igual a de outra pessoa que segue numa mota à velocidade de 20 km/h? A massa da pessoa e da sua moto é de 120 kg.

9. Uma bola de massa m=0.1kg está inicialmente a mover-se com velocidade $u_1 =$ 2m/s. A bola colide com outra bola idêntica que está em reposo.

a) Se a colisão for elástica, mostre que a primeira bola para completamente e a segunda bola sai com velocidade de 2m/s.

b) Considere agora que a colisão é inelástica. Apóis a colisão, a primeira bola sai com velocidade a metade da velocidade da segunda bola. Quais são as velocidades? Quanto energia foi perdido na colisão?

10. Uma massa pesada, $m_a = 10$ kg, em movimento a velocidade $u_{a,x} = 5.5$ m/s, colide com uma massa ligeira, $m_b = 1$ kg que está em reposo ($u_{b,x} = 0$ m/s).

Se a colisão for elástica, quais são as velocidades das massas depois da colisão?

11. Pêndulo balístico

Um bloco de madeira está suspenso por um fio de aço de comprimento 1 m. Quando em equilíbrio, parado, o pêndulo recebe uma bala à velocidade de 1000 km/h, que se aloja no seu interior do bloco. Se o bloco de madeira e a bala tiverem a massa de 1 kg e 28 g, respetivamente,

a) Qual a velocidade logo após a colisão do conjunto bloco-bala?

b) Calcule a energia cinética do conjunto bloco-bala logo após o impacto da bala.

a) Nesta colisão, mostre que a energia mecânica não se conserva.

Problemas Numéricos

12. Como teste de integração numérica, calcule usando a aproximação trapezoidal o integral

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{4}\, dx$$

que é igual a 1. Use vários passos δx e verifique que o erro é proporcional a δx^2.

13. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical.

a) Calcule a energia mecânica em qualquer instante, no caso de não considerar a resistência do ar.

b) Considerando a resistência do ar, calcule a energia mecânica nos três instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 0.4$ s e $t_2 = 0.8$ s.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 0.4$ s e $t_2 = 0.8$ s.

Use a aproximação trapezoidal para calcular os integrais. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A bola de ténis tem a massa 57 g.

14. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais: $x_0 = 4$ m e $v_{0x} = 0$.

b) Compare o cálculo de energia total se integrar numericamente as equações

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer.

15. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio, $x_{eq} = 2$ m. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k(|x| - x_{eq})^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = \begin{cases} -k(x - x_{eq}) & x > 0 \\ k(-x - x_{eq}) & x < 0 \end{cases}$$

onde $k = 1$ N/m.

a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial.

b) Qual o movimento quando a energia mecânica é 1J?

c) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Qual a amplitude e a frequência do movimento?

d) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 1.5 J? Qual a amplitude e a frequência do movimento?

16. Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s?

a) Qual a sua velocidade terminal?

b) Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?

c) Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

17. O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de 5°.

a) Quanto tempo demora a percorrer 2 km?

b) Qual a sua velocidade terminal?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

Soluções Problemas Teóricos

1. $v_x = \pm\sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right]}$, Não

2. a) $-kx$ b) $-mg$ c) $-2\,k\,\left(x^2 - x_{eq}^2\right)x$ d) $-G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$ e) $-K\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$

3. a) $\mathcal{O}(\delta x^2)$ b) $\mathcal{O}(\delta x)$

4. $|\vec{v}|^2 = 2\,g\,(y_0 - y)$ a) 22.1 m/s; b) 19.8 m/s

5. a) 120 W = 0.163 cv; b) 260 W = 0.353 cv; c) 92177 W = 125 cv,

6. a) 451 W b) 835 W

7. a) 216 W b) 486 W

8. 34.2 km/h

9. b) v1 = 2/3 m/s, v2 = 4/3 m/s; 0.1 J.

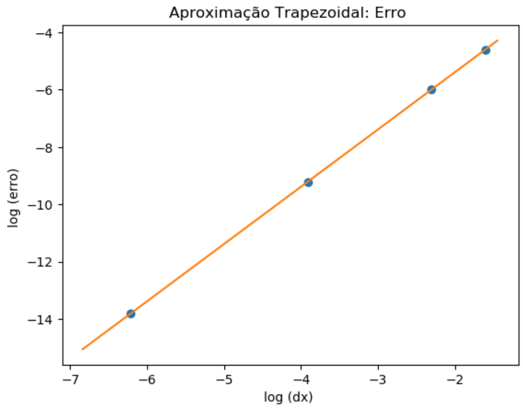
10. $v_{a,x} = 4.5$ m/s; $v_{b,x} = 10$ m/s

11. a) 7.57 m/s; b) 29.4 J; c) 16.3º

Soluções Problemas Numéricos

12.

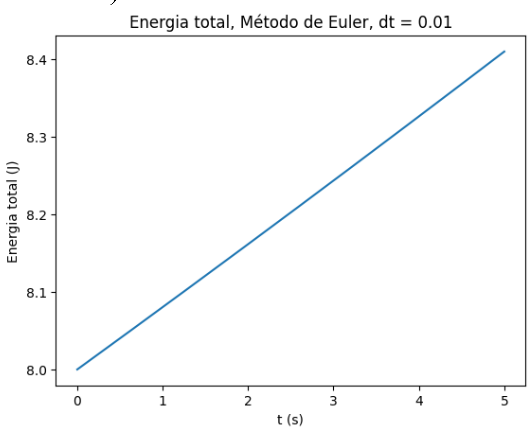
δx	Integral	erro
0.2	1.01	0.01
0.1	1.0025	0.0025
0.02	1.0001	0.0001
0.002	1.000001	0.000001

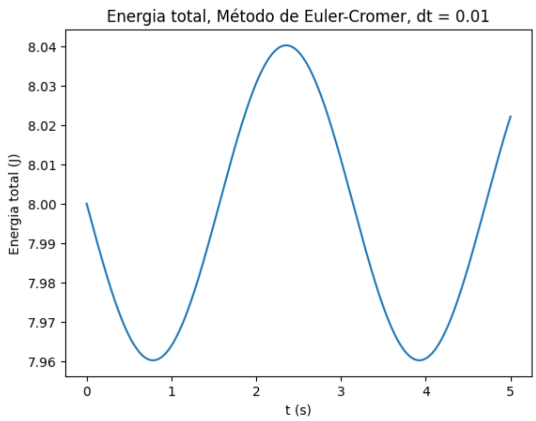


declive=2, $r^2 = 0.9999999999$

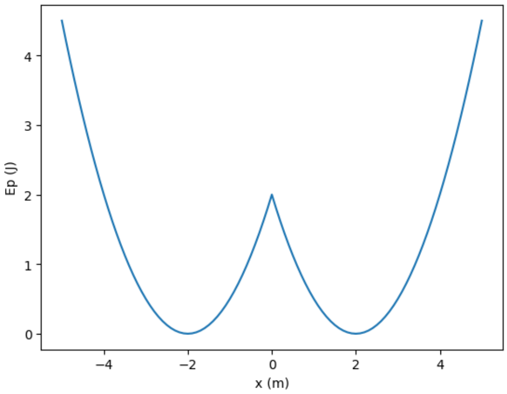
13. a) 21.99 J; b) 21.99 J; 17.01 J; 13.61 J; c) 0 J; -4.98 J; - 8.38 J

14. a) 8 J
b)





15. a)



b) Vai executar movimento oscilatório como um oscilador harmónico simples, à volta do ponto de equilíbrio mais perto à posição inicial.

c) Uma possibilidade das condições iniciais é x0= 1.225m/s, vx0 = 0m/s.
em que caso $x(t) = 1.225\ \cos(\omega t)$ com $\omega = 1$rad/s.
d) Com x0= 1.732m/s, vx0 = 0m/s temos $x(t) = 1.732\ \cos(\omega t)$ com $\omega = 1$rad/s.

16. a) 11.63 m/s; b) 23.66 s; c) 180.9 s = 477.3 s = 3' 0.9"

17. a) 4.21 m/s; b) 477.3 s = 7' 57.3"

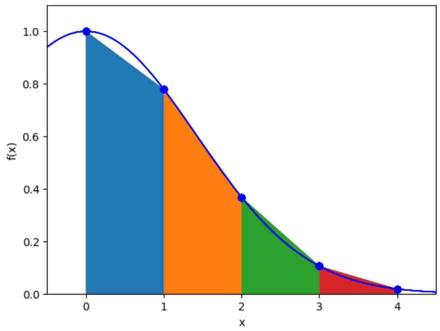
Apendice - Integração numérica a 1 dimensão:

Quando temos uma função $f(x)$ expressa só em pontos x_i, de í**ndices** $\boldsymbol{i} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \boldsymbol{n}$, igualmente espaçados por δx, num total de $\boldsymbol{n} + \mathbf{1}$ **elementos.** O integral desta função de pontos discretos, entre dois pontos a e b

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

e onde $n = (b-a)/\delta x$ e $x_i = a + i\, \delta x$, obtêm-se facilmente por integração numérica.

A interpretação geométrica do integral é a área limitada pela função entre os dois pontos extremos a e b. Na figura abaixo $a = 0$ e $b = 4$.



Essa áreas pode ser considerada como uma soma de n fatias de espessura $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Essa área pode ser considerada como uma soma de n fatias de espessura $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais. Assim $\delta x = (b-a)/n$

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

Aproximação retangular: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \approx f(x_i)\, \delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, \delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \approx \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x =$$

$$= \delta x \times \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Em python podemos obter o integral da função $f(x)$ pela aproximação trapezoidal:

Integral = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))

Note que temos $\boldsymbol{n+1}$ elementos da função.

Em termos da dimensão do vetor a integrar, ou seja de $\boldsymbol{n+1=n_{dim}}$

a integração trapezoidal é calculada por

integral = dx * ((f[0]+f[n_{dim}-1])*0.5+np.sum(f[1: $n_{dim}-1$]))

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x \right)_{ap.\ trap} \right|$$

A função $f(x)$ pela série de Taylor à volta de x_i

$$f(x) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}(x-x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i}(x-x_i)^2 + \mathcal{O}((x-x_i)^3)$$

Subst. em

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}(x-x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i}(x-x_i)^2 + \mathcal{O}((x-x_i)^3) \right] dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}(x-x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i}(x-x_i)^2 + \mathcal{O}((x-x_i)^3) \right] dx$$

$$= f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} + \mathcal{O}((x_{i+1}-x_i)^3)$$

$$= f(x_i)\,\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}\frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

E, por sua vez

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}(x_{i+1}-x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i}(x_{i+1}-x_i)^2 + \mathcal{O}((x_{i+1}-x_i)^3)$$

o que faz

$$\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2} = f(x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}\delta x + \frac{1}{4}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i}\delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

Subst. no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\ \delta x \right)_{ap.\ trap} \right|$$

$$= \left| f(x_i)\ \delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \ \mathcal{O}(\delta x^3) \right.$$

$$\left. - \left(\left(f(x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \ \mathcal{O}(\delta x^3) \right) \delta x \right) \right|$$

$$= \ \mathcal{O}(\delta x^3)$$

O erro local de truncatura de um integral de uma fatia é da $\mathcal{O}(\delta x^3)$.

O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é o acumular dos erros locais

$$n\ \mathcal{O}(\delta x^3) = \frac{b-a}{\delta x}\ \mathcal{O}(\delta x^3) = \mathcal{O}(\delta x^2).$$